Πρώτο τεστ Απειροστικός Λογισμός 2

Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Έστω ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών για την οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω επιλογές ως αληθείς ή ψευδείς (με πλήρη αιτιολογηση).

(α) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει.

(β) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει.

(γ) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^n$ συγκλίνει.

(δ) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ συγκλίνει.

(ε) αν $a_n \geq 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ συγκλίνει.

Θέμα 2

(i) Δίνεται $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\sum_{n=1}^{\infty}(1+x)^{-n} = 1$. Αποδείξτε ότι $x = 1$.

(ii) Δίνεται ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη αρνητικών αριθμών για την οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Υπολογίστε την τιμή της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$$

Θέμα 3

Δίνονται σειρές θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ συγκλίνει.

Θέμα 4

Εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών:

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2+n^3} - n^{3/2}$

(β) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

(γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{3^n+7^n}$

(δ) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\log n)^n}$

(ε) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$

Θέμα 5

Να βρεθούν τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι δυναμοσειρές $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^n$ και $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} x^n$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!